一般化された Abel 圏と蛇の補題

圏論のあか☆ねこ

2024 年 12 月 22 日

これは圏論 Advent Calendar 2024 の 22 日目の記事です.

1　一般化された Abel 圏の定義

以下, $\mathcal{C}$ は零対象 0 を持つ圏とする.

定義 1.1 (零射)**.** $\mathcal{C}$ の任意の対象 X, Y に対して, ただ一つの射 $X \to 0$ とただ一つの射 $0 \to Y$ の合成 $X \to 0 \to Y$ を**零射**という. 零射を 0 で表す.

定義 1.2 (部分対象, 商対象)**.** 圏 $\mathcal{C}$ の対象 X を一つ取る. 対象 A_i と mono 射 $f_i \colon A_i \to X$ $(i = 1, 2)$ に対して, ある同型射 $g \colon A_1 \to A_2$ で $f_1 = f_2 \circ g$ なるものがあるとき, 組 (A_1, f_1) と (A_2, f_2) は同値であるという.

対象 X に対して, 対象 A と mono 射 $f \colon A \to X$ の組 (A, f) の, 上記の意味での同値類を**部分対象**という. X の部分対象の全体を $\boldsymbol{S}(X)$ で表す.

双対的に**商対象**も定義できる. X の商対象の全体を $\boldsymbol{Q}(X)$ で表す.

定義 1.3 (交わり, 結び)**.** X の二つの部分対象 $(A_1, f_1), (A_2, f_2)$ がファイバー積を持つとする. すなわち, 対象 A_{12} と射 $h_i \colon A_{12} \to A_i$ $(i = 1, 2)$ で次図が引き戻しの図式になっているとする.

$$\begin{array}{ccc} A_{12} & \xrightarrow{h_2} & A_2 \\ {\scriptstyle h_1}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f_2} \\ A_1 & \xrightarrow{f_1} & X \end{array}$$

このときこれを**交わり**という. 双対的に二つの商対象の**結び**も定義される.

定義 1.4 (核)**.** $f \colon X \to Y$ の**核**とは, $\mathcal{C}$ の対象 K と射 $k \colon K \to X$ の組 (K, k) で以下を満たすものである.

1. $f \circ k = 0$,
2. $f \circ k' = 0$ となる射 $k' \colon K' \to X$ に対して射 $h \colon K' \to K$ で $k' = k \circ h$ となるものが一意に存在する.

$$
\begin{tikzcd}
K' \arrow[d, dashed, "\exists ! h"'] \arrow[dr, "k'"] & & \\
K \arrow[r, "k"] & X \arrow[r, "f"] & Y
\end{tikzcd}
$$

$k := \ker f, K := \operatorname{Ker} f$ と表す.

補題 1.1. $\ker f$ が存在するならば, $\ker f$ は mono である.

(証明) $K := \operatorname{Ker} f$ とし, $h_1, h_2 \colon K' \to K$ に対して $\ker f \circ h_1 = \ker f \circ h_2 = k'$ とする. このとき $f \circ k' = 0$ であるから, 核の性質により $k' = \ker f \circ h$ となる h が一意に存在する. 従って $h_1 = h = h_2$. □

このことから核とは上記のような部分対象 (K, k) の同値類と考えることができる.

定義 1.5 (余核)**.** $f \colon X \to Y$ の**余核**とは, $\mathcal{C}$ の対象 C と射 $c \colon Y \to C$ の組 (C, c) で以下を満たすものである.

1. $c \circ f = 0$,
2. $c' \circ f = 0$ となる射 $c' \colon Y \to C'$ に対して射 $h \colon C \to C'$ で $c' = h \circ c$ となるものが一意に存在する.

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] & Y \arrow[r, "c"] \arrow[dr, "c'"'] & C \arrow[d, dashed, "\exists ! h"] \\
 & & C'
\end{tikzcd}
$$

$c := \operatorname{coker} f, C := \operatorname{Coker} f$ と表す.

補題 1.2. $\operatorname{coker} f$ が存在するならば, $\operatorname{coker} f$ は epi である.

(証明) 補題 1.1 の双対である. □

このことから余核とは上記のような商対象 (C, c) の同値類と考えることができる.

定義 1.6 (像, 余像)**.** 射 f に対して, $\operatorname{coker} f$ の核 $\ker(\operatorname{coker} f)$ が存在するとき, これを f の**像**という. また, $\ker f$ の余核 $\operatorname{coker}(\ker f)$ が存在するとき, これを f の**余像**という. f の像を $\operatorname{im} f$ で, 余像を $\operatorname{coim} f$ で表す.

補題 1.3. $f = \operatorname{im} f \Rightarrow f$ は mono, $f = \operatorname{coim} f \Rightarrow f$ は epi.

(証明) 前半は $f = \operatorname{im} f = \ker(\operatorname{coker} f)$ による. 後半は $f = \operatorname{coim} f = \operatorname{coker}(\ker f)$ による. □

補題 1.4. $f \colon X \to Y$ が mono $\Rightarrow \ker f = 0 \Leftrightarrow \operatorname{coim} f = 1_X$.

(証明) 前半は自明. 後半は $\ker f = 0$ ならば $\operatorname{coim} f = \operatorname{coker}(0 \to X) = 1_X$ であることと, 逆に $\operatorname{coim} f = 1_X$ ならば $\ker f = \operatorname{coim} f \circ \ker f = \operatorname{coker}(\ker f) \circ \ker f = 0$ であることから. □

補題 1.5. $f \colon X \to Y$ が epi $\Rightarrow \operatorname{coker} f = 0 \Leftrightarrow \operatorname{im} f = 1_Y$.

(証明) 補題 1.4 の双対である. □

定義 1.7 (一般化された Abel 圏)**.** 圏 $\mathcal{C}$ が**一般化された Abel 圏**であるとは

1. $\mathcal{C}$ は零対象を持つ.
2. $\mathcal{C}$ の全ての射は核と余核を持つ.
3. 任意の $f \colon X \to Y$ に対して自然に定義される射 $\bar{f} \colon \operatorname{Coim} f \to \operatorname{Im} f$ が同型である.

を満たすことを言う. ここで「自然に定義される $\bar{f}$」とは以下のように作られる.

1. $\operatorname{coim} f \circ \ker f = \operatorname{coker}(\ker f) \circ \ker f = 0$ かつ $f \circ \ker f = 0$ により, $p \colon \operatorname{Coim} f \to Y$ で $f = p \circ \operatorname{coim} f$ となるものが一意に存在する.
2. $0 = \operatorname{coker} f \circ f = \operatorname{coker} f \circ p \circ \operatorname{coim} f$ かつ $\operatorname{coim} f$ が epi だから $\operatorname{coker} f \circ p = 0$.
3. $\operatorname{coker} f \circ \operatorname{im} f = \operatorname{coker} f \circ \ker(\operatorname{coker} f) = 0$ かつ $\operatorname{coker} f \circ p = 0$ により, $\bar{f} \colon \operatorname{Coim} f \to \operatorname{Im} f$ で $p = \operatorname{im} f \circ \bar{f}$ となるものが一意に存在する.
4. $\bar{f}$ は $f = \operatorname{im} f \circ \bar{f} \circ \operatorname{coim} f$ となるただ一つの射である.

$$
\begin{tikzcd}
 & \operatorname{Coim} f \arrow[r, dashed, "\exists! \bar{f}"] \arrow[dr, dashed, "\exists! p"] & \operatorname{Im} f \arrow[d, "\operatorname{im} f"] & \\
\operatorname{Ker} f \arrow[r, "\ker f"] & X \arrow[u, "\operatorname{coim} f"] \arrow[r, "f"] & Y \arrow[r, "\operatorname{coker} f"] & \operatorname{Coker} f
\end{tikzcd}
$$

定理 1.1. 一般化された Abel 圏において, 任意の mono 射はある射の核であり, 任意の epi 射はある射の余核である.

(証明) f が mono ならば上記 $\bar{f}$ を用いて $f = \operatorname{im} f \circ \bar{f} = \ker(\operatorname{coker} f) \circ \bar{f}$ と書ける (補題 1.4). 核は同型を除いて一意だから $f \cong \ker(\operatorname{coker} f)$ である.

双対的に f が epi ならば $f \cong \operatorname{coker}(\ker f)$ である. □

定理 1.2. 一般化された Abel 圏において $f \colon X \to Y$ が mono かつ epi ならば同型射である.

(証明) $f \cong \ker(\operatorname{coker} f) = \ker(Y \to 0) = 1_Y$ による. □

補題 1.6. 一般化された Abel 圏において $f = m \circ q, m = \operatorname{im} f$ と分解するとき, m は mono であるが, q は epi である.

(証明) $m \circ q = f = m \circ \bar{f} \circ \operatorname{coim} f$ かつ m は mono だから $q = \bar{f} \circ \operatorname{coim} f$. ここで $\bar{f}$ は同型かつ $\operatorname{coim} f$ は epi だから q も epi である. □

双対的に以下の補題が成り立つ.

補題 1.7. 一般化された Abel 圏において $f = p \circ e, e = \operatorname{coim} f$ と分解するとき, e は epi であるが, p は mono である.

従って, 一般化された Abel 圏において $f \colon X \to Y$ について以下が成り立つ.

定理 1.3. $\ker f = 0 \Rightarrow f$ は mono.

(証明) このとき $\operatorname{coim} f = 1_X$ であるから $f = p \circ \operatorname{coim} f = p$ (mono). □

以上により, 一般化された Abel 圏においては

1. f は mono
2. $\ker f = 0$
3. $\operatorname{coim} f = 1$
4. $f = \operatorname{im} f$

は全て同値となる. 双対的に

1. f は epi
2. $\operatorname{coker} f = 0$
3. $\operatorname{im} f = 1$
4. $f = \operatorname{coim} f$

も全て同値である.

補題 1.8. 一般化された Abel 圏の射 $f \colon X \to Y$ に対して $f = m \circ q, m = \operatorname{im} f$ とする. もし mono 射 $m' \colon Y' \to Y$ で $f = m' \circ q'$ $(q' \colon X \to Y')$ となるものがあれば, mono 射 $t \colon \operatorname{Im} f \to Y'$ で

$$m = m' \circ t, q' = t \circ q$$

となるものが一意に存在する.

(証明) 証明は [1] による. $g = \operatorname{coker} f, C = \operatorname{Coker} f$ とおく. また $g' = \operatorname{coker} m' \colon Y \to C' (= \operatorname{Coker} m')$ とする. このとき $g' \circ m' = 0$ だから

$$g' \circ f = g' \circ (m' \circ q') = (g' \circ m') \circ q' = 0$$

となる. よって $w \colon C \to C'$ で $g' = w \circ g$ となるものが一意に存在する.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "q"] \arrow[d, "q'"] \arrow[dr, "f"] & \operatorname{Im} f \arrow[d, "m"] & \\
Y' \arrow[r, "m'"] & Y \arrow[r, "g'"] \arrow[d, "g"] & C' \\
 & C \arrow[ur, dashed, "w"'] &
\end{tikzcd}$$

一方で $\operatorname{coker} m = \operatorname{coker}(\ker(\operatorname{coker} f)) = \operatorname{coker} f = g$ であるから $g \circ m = 0$. 故に

$$g' \circ m = (w \circ g) \circ m = w \circ (g \circ m) = 0$$

である. $g' = \operatorname{coker} m'$ により $m' = \ker g'$ であるから $t \colon \operatorname{Im} f \to Y'$ で $m = m' \circ t$ となるものが一意に存在する. m が mono であるから t も mono である. また

$$m' \circ q' = m \circ q = (m' \circ t) \circ q = m' \circ (t \circ q)$$

において m' が mono であるから $q' = t \circ q$ である. □

双対命題として以下が成り立つ.

補題 1.9. 一般化された Abel 圏の射 $f \colon X \to Y$ に対して $f = p \circ e, e = \operatorname{coim} f$ とする. もし epi 射 $e' \colon X \to X'$ で $f = p' \circ e'$ $(p' \colon X' \to Y)$ となるものがあれば, epi 射 $s \colon X' \to \operatorname{Coim} f$ で

$$e = s \circ e', p' = p \circ s$$

となるものが一意に存在する.

定理 1.4 (一意 epi-mono 分解)**.** 一般化された Abel 圏の全ての射 $f \colon X \to Y$ は mono 射 $m \colon C \to Y$ と epi 射 $e \colon X \to C$ を用いて $f = m \circ e$ と表すことができる. また mono 射 $m' \colon C' \to Y$ と epi 射 $e' \colon X \to C'$ で $f = m' \circ e'$ となるものがあれば, 同等射 $t \colon C \to C'$ で $e' = t \circ e, m = m' \circ t$ となるものがただ一つ存在する.

$$\begin{tikzcd}
 & C \arrow[dr, "m"] \arrow[dd, "t"] & \\
X \arrow[ur, "e"] \arrow[dr, "e'"'] & & Y \\
 & C' \arrow[ur, "m'"'] &
\end{tikzcd}$$

定理 1.5. 一般化された Abel 圏において, $f, g \circ f$ が epi ならば g も epi である.

(証明) g の epi-mono 分解を考える.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[ddr, "g\circ f"'] & Y \arrow[dd, "g"] \arrow[dr, "e"] & \\
 & & C \arrow[dl, "i"] \\
 & Z &
\end{tikzcd}$$

上図において, $e \circ f$ と i は $g \circ f$ の epi-mono 分解を与えるが, epi-mono 分解の一意性と $g \circ f$ が epi であることから, i は同等射でなければならない. 故に $g \cong e$ は epi である. □

最後に, 交わりと結びについて述べておく.

定理 1.6. 一般化された Abel 圏において, 対象 X の任意の二つの部分対象は常に交わりを持つ.

(証明) 証明は [1] による. $f_i\colon A_i \to X$ $(i = 1, 2)$ をいずれも mono 射とする.

$$ {f_1}^* = \operatorname{coker} f_1 \colon X \to C $$

とし,

$$ h_2 = \ker({f_1}^* \circ f_2)\colon A_{12} \to A_2 $$

とする. f_2, h_2 がともに mono なので, $f_2 \circ h_2$ も mono である.

$$\begin{tikzcd}
A_{12} \arrow[r, "h_2"] & A_2 \arrow[d, "f_2"] & \\
A_1 \arrow[r, "f_1"] & X \arrow[r, "{f_1}^*"] & C
\end{tikzcd}$$

$0 = ({f_1}^* \circ f_2) \circ h_2 = {f_1}^* \circ (f_2 \circ h_2)$ かつ $f_1 \cong \ker(\operatorname{coker} f_1) = \ker {f_1}^*$ により, ある射 $h_1\colon A_{12} \to A_1$ が存在して $f_2 \circ h_2 = f_1 \circ h_1$ となる.

$$\begin{tikzcd}
A_{12} \arrow[r, "h_2"] \arrow[d, "h_1"] & A_2 \arrow[d, "f_2"] \\
A_1 \arrow[r, "f_1"] & X
\end{tikzcd}$$

これが引き戻しの図式であることを見るために, ある対象 B と射 $g_i\colon B \to A_i$ を取り, $f_1 \circ g_1 = f_2 \circ g_2$ であるとする.

$h_2 = \ker({f_1}^* \circ f_2)$ と

$$ ({f_1}^* \circ f_2) \circ g_2 = {f_1}^* \circ (f_2 \circ g_2) = {f_1}^* \circ (f_1 \circ g_1) = ({f_1}^* \circ f_1) \circ g_1 = 0 $$

により, $g\colon B \to A_{12}$ で $g_2 = h_2 \circ g$ となるものが一意に定まる.
　このとき

$$f_1 \circ g_1 = f_2 \circ g_2 = f_2 \circ (h_2 \circ g) = (f_2 \circ h_2) \circ g = (f_1 \circ h_1) \circ g = f_1 \circ (h_1 \circ g)$$

が成り立つ. f_1 は mono だから $g_1 = h_1 \circ g$ となる.

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[dr, dashed, "g"] \arrow[drr, bend left, "g_2"] \arrow[ddr, bend right, "g_1"'] & & \\
& A_{12} \arrow[r, "h_2"'] \arrow[d, "h_1"] & A_2 \arrow[d, "f_2"] & \\
& A_1 \arrow[r, "f_1"] & X \arrow[r, "{f_1}^*"] & C
\end{tikzcd}$$

□

定理 1.7. 一般化された Abel 圏において, 対象 X の任意の二つの商対象は常に結びを持つ.

(証明) 定理 1.6 の双対である. □

2　完全列と蛇の補題

　以下は全て一般化された Abel 圏で考える.

定義 2.1 (完全列)**.** 射の列

$$\cdots \longrightarrow A_{n-1} \xrightarrow{f_{n-1}} A_n \xrightarrow{f_n} A_{n+1} \xrightarrow{f_{n+1}} \cdots$$

は $\mathrm{Im}\, f_{n-1} = \mathrm{Ker}\, f_n$ が成り立つとき**完全列**であるという.

補題 2.1.
1. $f\colon X \to Y$ が mono $\Leftrightarrow 0 \to X \xrightarrow{f} Y$ が完全.
2. $f\colon X \to Y$ が epi $\Leftrightarrow X \xrightarrow{f} Y \to 0$ が完全.
3. $f\colon X \to Y$ が同型 $\Leftrightarrow 0 \to X \xrightarrow{f} Y \to 0$ が完全.

　証明は自明である.

補題 2.2. 完全列の可換図式

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r] \arrow[d, "a"'] & B \arrow[r] \arrow[d, "b"'] & C \arrow[r] \arrow[d, "c"'] & D \arrow[d, "d"'] \\
A' \arrow[r] \arrow[d] & B' \arrow[r] & C' \arrow[r] & D' \\
0 & & &
\end{tikzcd}$$

から導かれる列 $\mathrm{Ker}\, b \to \mathrm{Ker}\, c \to \mathrm{Ker}\, d$ は完全である.

(証明) 証明は [2] による. 以下の二つに分けて考える.

$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & E \arrow[r] \arrow[d, "e"'] & C \arrow[r] \arrow[d, "c"'] & D \arrow[d, "d"'] \\
0 \arrow[r] & E' \arrow[r] & C' \arrow[r] & D'
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[r] \arrow[d, "a"'] & B \arrow[r] \arrow[d, "b"'] & E \arrow[r] \arrow[d, "e"'] & 0 \\
A' \arrow[r] \arrow[d] & B' \arrow[r] & E' \arrow[r] & 0 \\
0 & & &
\end{tikzcd}
$$

ここで

$$
\begin{aligned}
E &= \mathrm{Ker}(C \to D) \\
&= \mathrm{Im}(B \to C) \\
&\cong \mathrm{Coim}(B \to C) \\
&= \mathrm{Coker}(\mathrm{Ker}(B \to C)) \\
&= \mathrm{Coker}(\mathrm{Im}(A \to B)) \\
&= \mathrm{Coker}(\mathrm{Ker}(\mathrm{Coker}(A \to B))) \\
&= \mathrm{Coker}(A \to B)
\end{aligned}
$$

である. E' も同様である.

(α) $0 \to \mathrm{Ker}\, e \to \mathrm{Ker}\, c \to \mathrm{Ker}\, d$ は完全である.

(β) $\mathrm{Ker}\, b \to \mathrm{Ker}\, e$ は epi である.

(α) については, 以下の可換図式を考える.

$$
\begin{tikzcd}
\color{red}X \arrow[dr, dashed, red] \arrow[drr, bend left, red] \arrow[ddr, bend right, red] & & & & \\
& \mathrm{Ker}\, e \arrow[r, "h"] \arrow[d, "\ker e"] & \mathrm{Ker}\, c \arrow[r, "k"] \arrow[d, "\ker c"] & \mathrm{Ker}\, d \arrow[d, "\ker d"] & \\
0 \arrow[r] & E \arrow[r, "\ker f"] \arrow[d, "e"'] & C \arrow[r, "f"] \arrow[d, "c"'] & D \arrow[d, "d"'] & (\mathrm{exact}) \\
0 \arrow[r] & E' \arrow[r, "\ker f'"] & C' \arrow[r, "f'"] & D' & (\mathrm{exact}) \\
& (\mathrm{exact}) & (\mathrm{exact}) & (\mathrm{exact}) &
\end{tikzcd}
$$

h の取り方から, $\mathrm{Ker}\, e$ は E と $\mathrm{Ker}\, c$ の交わりになるので, 上図から

$$h = \ker((\ker d) \circ k)$$

である. 従って h は mono となるので, $\operatorname{im} h = h$ となることに注意すると, 以下の図を可換にするような射がそれぞれに存在する.

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{Im} h \arrow[d, dashed, "\exists!"] \arrow[dr, "h"] & & \\
\operatorname{Ker} k \arrow[r, "\ker k"'] & \operatorname{Ker} c \arrow[r, "k"] & \operatorname{Ker} d
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{Ker} k \arrow[d, dashed, "\exists!"] \arrow[dr, "\ker k"] & & \\
\operatorname{Im} h \arrow[r, "h"] & \operatorname{Ker} c \arrow[r, "(\ker d)\circ k"] & D
\end{tikzcd}$$

以上により $\operatorname{Im} h = \operatorname{Ker} k$ が示される.

(β.1) $\operatorname{Coker} b \to \operatorname{Coker} e$ は同型である.

以下の図式に (α) の双対を適用すればよい.

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r] \arrow[d, "a"'] & B \arrow[r] \arrow[d, "b"'] & E \arrow[r] \arrow[d, "e"'] & 0 \\
A' \arrow[r] \arrow[d] & B' \arrow[r] & E' \arrow[r] & 0 \\
0 & & &
\end{tikzcd}$$

(β.2) 完全列の可換図式

$$\begin{tikzcd}
A' \arrow[r] \arrow[d] & B' \arrow[r] \arrow[d] & E' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \operatorname{Coker} b \arrow[r] & \operatorname{Coker} e \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

から完全列 $A' \to \operatorname{Im} b \to \operatorname{Im} e$ を得る. そのためにまず A' を $B' \to E'$ の核で置き換えて (α) を用いて完全列 $0 \to \operatorname{Ker}(B' \to E') \to \operatorname{Im} b \to \operatorname{Im} e$ を得る. そして

$$A' \to \operatorname{Ker}(B' \to E') = \operatorname{Im}(A' \to B')$$

は epi であるから求める結果となる.

(β.3) 以上により以下の完全列の可換図式を得る.

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r] \arrow[d, "a"'] & B \arrow[r] \arrow[d, "b'"'] & E \arrow[r] \arrow[d, "e'"'] & 0 \\
A' \arrow[r] \arrow[d] & \operatorname{Im} b \arrow[r] \arrow[d] & \operatorname{Im} e \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

このとき e' は $\mathrm{Ker}\, b' \to E$ の余核である.

$$
\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
 & \mathrm{Ker}\, b \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Ker}\, e \arrow[d] & \\
A \arrow[r] \arrow[d, "a"'] & B \arrow[r] \arrow[d, "b'"'] & E \arrow[r] \arrow[d, "e'"'] & 0 \\
A' \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Im}\, b \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Im}\, e \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}
$$

以上で $\mathrm{Ker}\, b \to \mathrm{Ker}\, e$ が epi になることがわかる. □

上記の双対として以下の補題を得る.

補題 2.3. 完全列の可換図式

$$
\begin{tikzcd}
 & & & 0 \arrow[d] \\
A \arrow[r] \arrow[d, "a"'] & B \arrow[r] \arrow[d, "b"'] & C \arrow[r] \arrow[d, "c"'] & D \arrow[d, "d"'] \\
A' \arrow[r] & B' \arrow[r] & C' \arrow[r] & D'
\end{tikzcd}
$$

から導かれる列 $\mathrm{Coker}\, a \to \mathrm{Coker}\, b \to \mathrm{Coker}\, c$ は完全である.

定理 2.1 (蛇の補題)**.** 次の完全列の可換図式

$$
\begin{tikzcd}
 & & & & 0 \arrow[d] \\
A \arrow[r] \arrow[d, "a"'] & B \arrow[r] \arrow[d, "b"'] & C \arrow[r] \arrow[d, "c"'] & D \arrow[r] \arrow[d, "d"'] & E \arrow[d, "e"'] \\
A' \arrow[r] \arrow[d] & B' \arrow[r] & C' \arrow[r] & D' \arrow[r] & E' \\
0 & & & &
\end{tikzcd}
$$

に対して次の列

$$
\mathrm{Ker}\, b \to \mathrm{Ker}\, c \to \mathrm{Ker}\, d \xrightarrow{\partial} \mathrm{Coker}\, b \to \mathrm{Coker}\, c \to \mathrm{Coker}\, d
$$

は完全である. 詳しく言うと

(1) $K = \mathrm{Ker}(C \to D')$ とおくと $K \to \mathrm{Ker}\, d$ が全射になる.

(2) $K' = \mathrm{Coker}(B \to C')$ とおくと $\mathrm{Coker}\, b \to K'$ が単射になる.

(3) 射の合成

$$K \to C \xrightarrow{c} C' \to K'$$

と射の合成

$$K \to \mathrm{Ker}\, d \xrightarrow{\partial} \mathrm{Coker}\, b \to K'$$

とが等しくなるような射

$$\partial\colon \mathrm{Ker}\, d \to \mathrm{Coker}\, b$$

がただ一つ存在する.

(4) 上の 6 項からなる列が完全となる.

(証明) f を射 $C' \to \mathrm{Ker}(D' \to E')$ とする. 完全列の可換図式

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r] \arrow[d] & B \arrow[r] \arrow[d] & C \arrow[r] \arrow[d, "fc"'] & D \arrow[r] \arrow[d, "d"'] & E \arrow[d, "e"'] \\
0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Im}\, f \arrow[r] & D' \arrow[r] & E' \\
0 & 0 & & &
\end{tikzcd}$$

に対して補題 2.2 を 2 回用いて完全列

$$B \to K \to \mathrm{Ker}\, d \to 0$$

を得る. 同様に完全列

$$0 \to \mathrm{Coker}\, b \to K' \to D'$$

を得る. これで (1), (2), (3) が示された.

(4) については, 2.2, 2.3 と双対性から

$$\mathrm{Ker}\, c \to \mathrm{Ker}\, d \to \mathrm{Coker}\, b$$

の完全性を示せばよい. そのためには

$$\mathrm{Ker}\, c \to \mathrm{Ker}\, d \to K'$$

が完全であればよい. 図式

$$
\begin{tikzcd}
B \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{id}"'] & K \arrow[r] \arrow[d] & \operatorname{Ker} d \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[d] \\
B \arrow[r] \arrow[d] & C' \arrow[r] & K' \arrow[r] & 0 \\
0 & & &
\end{tikzcd}
$$

と 2.2 から結論を得る.

□

蛇の補題の系として以下の補題を得る.

補題 2.4 (5 項補題)**.** 次の完全列の可換図式

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[r] \arrow[d, "a"'] & B \arrow[r] \arrow[d, "b"'] & C \arrow[r] \arrow[d, "c"'] & D \arrow[r] \arrow[d, "d"'] & E \arrow[d, "e"'] \\
A' \arrow[r] & B' \arrow[r] & C' \arrow[r] & D' \arrow[r] & E'
\end{tikzcd}
$$

について

1. a, b, d が epi ならば c も epi
2. b, d, e が mono ならば c も mono

が成り立つ.

3 気になっているところ

というわけで, Iversen's exact category(一般化された Abel 圏) で強いバージョンの蛇の補題を示したのですが, まだ自分でも理解できてないところがあります. 特に

射の合成

$$K \to C \xrightarrow{c} C' \to K'$$

と射の合成

$$K \to \operatorname{Ker} d \xrightarrow{\partial} \operatorname{Coker} b \to K'$$

とが等しくなるような射

$$\partial \colon \operatorname{Ker} d \to \operatorname{Coker} b$$

がただ一つ存在する.

のところが自力で示せていません (具体的な ∂ の構成が出来ていない). 参考文献も色々当たっていますが, この件について詳細をご存知の方がいらっしゃいましたら, 情報をお待ちしております.

参考文献

[1] 河田敬義. ホモロジー代数. 岩波書店, 1990.

[2] B. イヴァセン (前田博信訳). 層のコホモロジー. シュプリンガー・フェアラーク東京, 1997.

[3] Shi Rong and Pu Zhang. Strong version of snake lemma in exact categories. *Homology, Homotopy and Applications*, Vol. 23, No. 2, pp. 151–163, 2021.